Славненайте Лина
11 класс поберезье 1

М-11-5

208

Пусть $P(x)$ x^2+bx+c

$$D=b^2-4c$$

Т.к 2 решения, то $D>0$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4c}}{2}$$

Пусть $Q(x)$ y^2+zy+f

$$D=z^2-4f$$

$$y_{1,2}=\frac{-z\pm\sqrt{z^2-4f}}{2}$$

Тогда можем записать $P(x)$ и $Q(x)$ как:

$$(x-x_1)(x-x_2)=0$$

$$(y-y_1)(y-y_2)=0$$

$$P(x)\quad \left(x+\frac{b+\sqrt{b^2-4c}}{2}\right)\left(x+\frac{b-\sqrt{b^2-4c}}{2}\right)=0$$

$$Q(x)\quad \left(y+\frac{z+\sqrt{z^2-4f}}{2}\right)\left(y+\frac{z^2-\sqrt{z^2-4f}}{2}\right)=0$$

Подставим в $P(x)$ вместо $x\to y_1$, потом y_2 и сложим

Далее в $Q(x)$ вместо $y\to x_1$, потом x_2 и сложим

По условию суммы должны быть равны.

Приравняем

① Рассмотрим $(x-x_1)(x-x_2)$, где вместо x подставим y_1

② Рассмотрим $(x-x_1)(x-x_2)$, где вместо x подставим y_2

③ Сложим

④ Рассмотрим $(y-y_1)(y-y_2)$, где вместо y подств. x_1

⑤ Рассмотрим $(y-y_1)(y-y_2)$, где вместо $y \to x_2$

⑥ Сложим

⑦ Приравняем

Общее уравнение имеет вид:

$$\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4c}+z+\sqrt{z^2-4f}}{2}\right)\cdot\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4c}+z-\sqrt{z^2-4f}}{2}\right)$$
$$+\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4c}+z+\sqrt{z^2-4f}}{2}\right)\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4c}+z-\sqrt{z^2-4f}}{2}\right)$$
$$=\left(\frac{-z+\sqrt{z^2-4f}+b+\sqrt{b^2-4c}}{2}\right)\left(\frac{-z+\sqrt{z^2-4f}+b-\sqrt{b^2-4c}}{2}\right)$$
$$+\left(\frac{-z-\sqrt{z^2-4f}+b+\sqrt{b^2-4c}}{2}\right)\cdot\left(\frac{-z-\sqrt{z^2-4f}+b-\sqrt{b^2-4c}}{2}\right)$$

① $b^2-b\sqrt{b^2-4c}-bz+\cancel{b\sqrt{z^2-4f}}-b\sqrt{b^2-4c}+b^2-4c+$
$+z\sqrt{b^2-4c}-\cancel{\sqrt{b^2-4c}\cdot\sqrt{z^2-4f}}-bz+z\sqrt{b^2-4c}+\cancel{z^2}$
$-\cancel{z\sqrt{z^2-4f}}-\cancel{b\sqrt{z^2-4f}}+\cancel{\sqrt{b^2-4c}\sqrt{z^2-4f}}+\cancel{z\sqrt{z^2-4f}}$
$\cancel{-z^2}+4f$

Упростим

/ — сокращение

$$= 2b^2 - 2b\sqrt{b^2-4c} + 2z\sqrt{b^2-4c} - 2bz - 4c + 4f$$

(2) $b^2 + b\sqrt{b^2-4c} - bz + b\sqrt{z^2-4f} + b\sqrt{b^2-4c} + b^2 - 4c$
$- z\sqrt{b^2-4c} + \sqrt{b^2-4c}\sqrt{z^2-4f} - zb - z\sqrt{b^2-4c} + z^2 - z\sqrt{z^2-4f}$
$- b\sqrt{z^2-4f} - \sqrt{b^2-4c}\cdot\sqrt{z^2-4f} + z\sqrt{z^2-4f} - z^2 + 4f =$
$= 2b^2 + 2b\sqrt{b^2-4c} - 2bz - 2z\sqrt{b^2-4c} - 4c + 4f$

(3) $2b^2 - 2b\sqrt{b^2-4c} + 2z\sqrt{b^2-4c} - 2bz - 4c + 4f +$
$+ 2b^2 + 2b\sqrt{b^2-4c} - 2z\sqrt{b^2-4c} - 2bz - 4c + 4f =$
$= 4b^2 - 4bz - 8c + 8f$

(4) $z^2 - z\sqrt{z^2-4f} - zb + z\sqrt{b^2-4c} - z\sqrt{z^2-4f} + z^2 - 4f +$
$+ b\sqrt{z^2-4f} - \sqrt{b^2-4c}\sqrt{z^2-4f} - bz + b\sqrt{z^2-4f} + b^2 - b\sqrt{b^2-4c}$
$- z\sqrt{b^2-4c} + \sqrt{b^2-4c}\sqrt{z^2-4f} + b\sqrt{b^2-4c} - b^2 + 4c =$
$= 2z^2 - 4f + 4c - 2z\sqrt{z^2-4f} - 2zb + 2b\sqrt{z^2-4f}$

(5) $z^2 - z\sqrt{z^2-4f} - zb + z\sqrt{b^2-4c} + z\sqrt{z^2-4f} + z^2 - 4f$
$- b\sqrt{z^2-4f} + \sqrt{b^2-4c}\sqrt{z^2-4f} - bz - b\sqrt{z^2-4f} + b^2 - b\sqrt{b^2-4c}$
$- z\sqrt{b^2-4c} - \sqrt{b^2-4c}\cdot\sqrt{z^2-4f} + b\sqrt{b^2-4c} - b^2 + 4c =$
$= 2z^2 + 2z\sqrt{z^2-4f} + 4c - 4f - 2bz - 2b\sqrt{z^2-4f}$

(6) $2z^2 - 4f + 4c - 2z\sqrt{z^2-4f} - 2zb + 2b\sqrt{z^2-4f} +$
$+ 2z^2 - 4f + 4c + 2z\sqrt{z^2-4f} - 2zb - 2b\sqrt{z^2-4f} =$
$= 4z^2 - 8f + 8c - 4zb$

(7) $4b^2 - 4bz - 8c + 8f = 4z^2 - 8f + 8c - 4zb$

$4b^2 - 16c = 4z^2 - 16f$

$4(b^2 - 4c) = 4(z^2 - 4f)$

$b^2 - 4c = z^2 - 4f$ +

$D_1 = D_2$

ч.т.д.

№ 3 3б

$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2\sqrt{n} - \frac{3}{2}$

Неравенство будет верно, если будет выполнено при $n = 1$ и $n = k+1$

+ • 1

$1 > 2\sqrt{1} - \frac{3}{2}$

$1 > 2 - \frac{3}{2}$

$1 > 0{,}5$

верно

• $n+1$

(1) $\underbrace{1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots \frac{1}{\sqrt{n}}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} > 2\sqrt{n+1} - \frac{3}{2}$

~~мы~~ уже доказали, что эта часть $> 2\sqrt{n} - \frac{3}{2}$

Пусть $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\dots\frac{1}{\sqrt{n}}=X$

Поскольку $X>2\sqrt{n}-\frac{3}{2}$, то $X-2\sqrt{n}+\frac{3}{2}>0$

Вычтем из неравенства ① $\left(2\sqrt{n}-\frac{3}{2}\right)$

$$X-2\sqrt{n}+\frac{3}{2}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}>2\sqrt{n+1}-\cancel{\frac{3}{2}}-2\sqrt{n}+\cancel{\frac{3}{2}}$$

$$\underbrace{X-2\sqrt{n}+\frac{3}{2}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}>2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}$$

доказали, что ~~эта~~ часть >0, тогда чтобы неравенство было верно, должно выполняться.

$$2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}>0$$

$$\frac{2(n+1)-2\sqrt{(n+1)\cdot n}-1}{\sqrt{n+1}}>0$$

Пусть $\sqrt{n+1}=y$, где $y>0$, $n+1>0$

$n>-1$ – верно, т.к. n - натуральное число

~~(n≥~~ $\sqrt{n+1}=0$

$n+1\neq 0$

$n\neq -1$

$2y^2-2y\sqrt{n}-1>0$, т.к. знаменатель при любом n будет >0

$D=b^2-4ac$

$D=4n+8$

Чтобы неравенство имело смысл, / ⊖

D должен быть >0

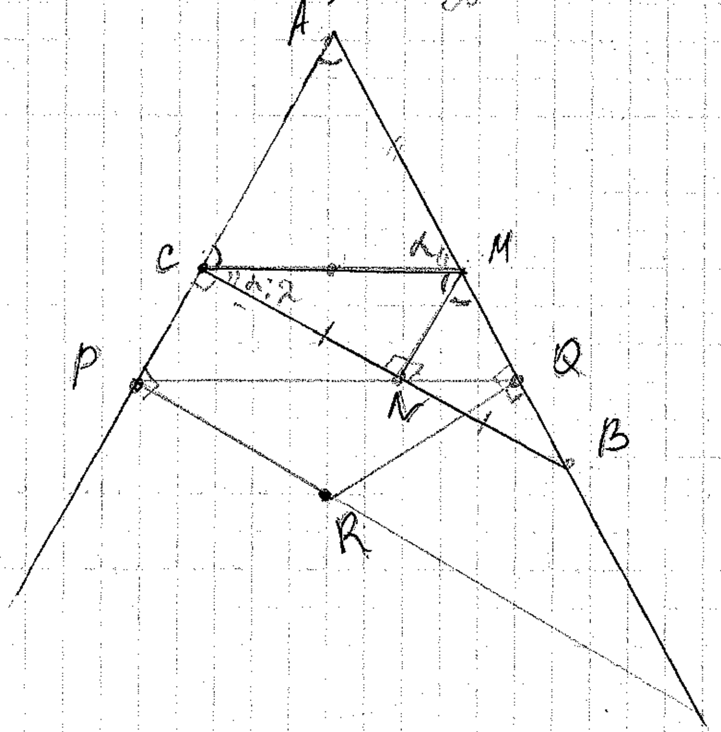
$D \geq 0 \quad 4n+8 \geq 0$
$4n \geq -8$
$n \geq -2$

$a>0$, значит ветви параболы направлены вверх

$n \geq -2$ при любом n, т.к. n – натур. число

ч.т.д.

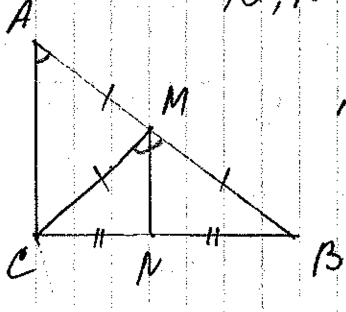
№ 4 3б



Дано:
$\angle C = 90°$
$AM = MB$
$CN = NB$
R - вневпис. окр $\triangle ACM$

Док-ть
$P, Q, N \in m$

Решение:

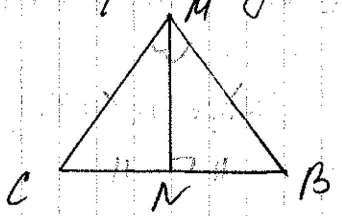


CM - медиана, проведенная из прямого угла на гипотенузу $\Rightarrow CM = \frac{1}{2} AB$

$CM = AM = MB$

$AM = MB$; $CN = NB \Rightarrow MN$ - средняя линия.
Тогда $MN \parallel AC$, где AC - основание $\triangle ABC$
$\Rightarrow \angle ACB = \angle MNB = 90°$ | как одно. соотв.
$\angle CAB = \angle NMB$

Рассмотрим $\triangle CMB$



$CM = MB \Rightarrow \triangle CMB$ равнобедр.

Тогда по свой-ву равноб. $\triangle$ MN - медиана, высота и биссектр.

Если $N \in PQ$, то подставив её координаты в ур-е PQ, равенство будет верным

$y = kx + b$

$PR \perp AP$ (радиус, пров. в точку касания)

$BC \perp AP$

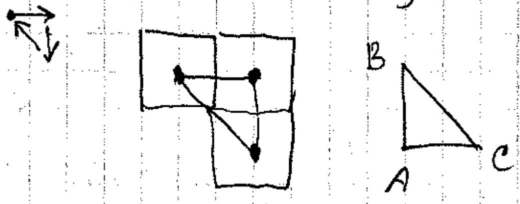
$\Rightarrow BC \parallel PR$

?

№5. №6

Наименьшее:

Состоит из 3 линий



~~$AB = 2 = AC = 2$~~

~~$BC = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$~~

~~Длина $= 2 + 2 + 2\sqrt{2} = 4 + 2\sqrt{2}$~~

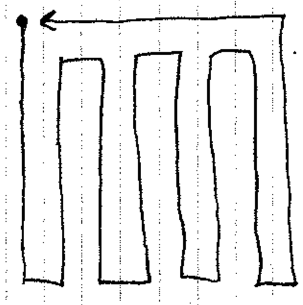
Если сторона клетки равна 1, то

$BA = AC = 1$

$BC = \sqrt{2}$

Длина $= 2 + \sqrt{2}$, если побивать не на всех клетках

Наименьшая длина – перпендикуляр

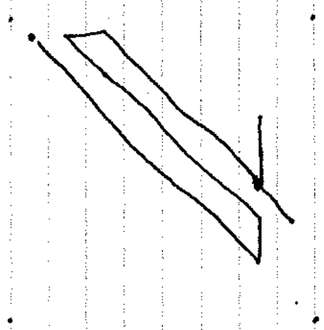


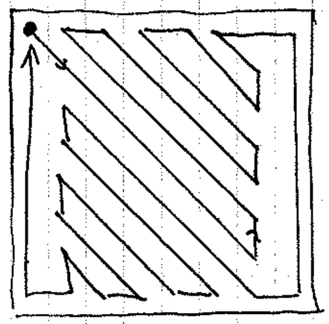
$7\cdot 3 + 1\cdot 7 + 6\cdot 6 \neq$

$7\cdot 3+1\cdot 7+6\cdot 6 =$

$= 21+7+36 = 64$ +

Наибольшая длина – по гипотенузам





$a=\sqrt{2}$

$6\sqrt{2} + 2\cdot \overset{10}{5}\sqrt{2} + 2\cdot \overset{8}{4}\sqrt{2} + 2\cdot \overset{6}{3}\sqrt{2} + 2\cdot \overset{4}{2}\sqrt{2} + 2\sqrt{2} +$

$+ 14 + 7\cdot 2 = 36\sqrt{2} + 28$ +